2.3 Superposition harmonischer Schwingungen: die Fourier-Analyse

Schwingungen linear $\Rightarrow$ *Lsgn. superponierbar*

Bsp.: $x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

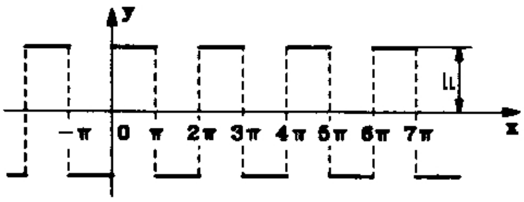
Ergebnis der Überlagerung: $x(t)$ *periodisch, aber nicht mehr harmonisch!*

2.3.1 Erinnerung: Darstellung periodischer Funktionen durch Fourier-Reihen

Beliebige periodische Funktionen $f(t) = f(t+nT)$ lassen sich durch Harmonische derselben Grundfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$ und die zugehörigen Oberschwingungen darstellen: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ FOURIER-Reihe

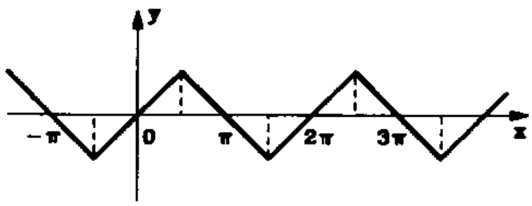
Beispiele: Setze $x \equiv \omega t = 2\pi t/T,\ y \equiv f(t)$

- Rechteckkurve:



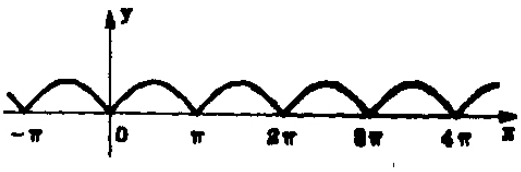
$$y = \frac{4h}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right)$$

- Dreieckskurve:



$$y = \frac{8h}{\pi^2}\left(\sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x + \dots\right)$$

- gleichgerichtete Sinuskurve:



$$y = h\,|\sin x| = \frac{4h}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x + \dots\right)$$

Symmetrie!

Wie erhält man Entwicklungskoeffizienten?
Rezept: mit $\cos mx$ bzw. $\sin mx$ multiplizieren und über eine Periode integrieren.
Erinnerung:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \cos mx \cdot \cos nx = \pi\delta_{mn} := \pi \cdot \left\{ \begin{array}{lcl} 0 & : & m \neq n \\ 1 & : & m = n \end{array} \right.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \sin mx \cdot \cos nx = 0 \qquad \text{(math.: Orthogonalitätsbeding.)}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\ \cos x \quad &= \quad \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \cos x}_{=0} + a_1 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \cos x\ \cos x}_{=\pi} + a_2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \cos 2x\ \cos x}_{=0} \\ &+ \quad b_1 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \sin x\ \cos x}_{=0} + b_2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \sin 2x\ \cos x}_{=0} \ldots \end{aligned}$$

mathematische Sprechweise: Nütze Orthogonalität und Vollständigkeit harmonischer Funktionen aus!

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\ \cos x$$

entsprechend mit den anderen Harmonischen $\cos nx$ und $\sin nx$

Entwicklungskoeffizienten:

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_n \quad &= \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\ \cos nx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\ \cos n\omega_0 t \\ \Rightarrow b_n \quad &= \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\ \sin nx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\ \sin n\omega_0 t \end{aligned}$$

Idee: Aufgrund der 'Orthogonalität' harmonischer Funktionen projizieren diese Integrale gerade die in $f(x)$ enthaltene $\cos nx$- bzw. $\sin nx$-Komponente heraus!

Die Integrale können analytisch oder numerisch ausgewertet werden.

Versuch: Oberschwingungen bei Sinus-, Rechteck- und Dreiecksfolgen
Funktionsgenerator, HP-Spektrum-Analysator mit linearer Skala:

- Sinus:

  eine Linie bei $f_0 = 100\,\text{kHz}$

- Rechteck:

  ungeradzahlige Vielfache von f_0, *schwach* abfallend, keine geraden Vielfachen!

f/f_0	v_{max}[mV]	$n \cdot V_{max}$
1	200	200
3	71.3	213
5	40.9	205
7	30.7	215

$\Rightarrow \boxed{a_n \sim \frac{1}{n}}$

- Dreieck:

  ungeradzahlige Vielfache von f_0, *stark* abfallend, keine geraden Vielfachen!

f/f_0	v_{max}[mV]	$n^2 \cdot V_{max}$
1	203	203
3	25	225
5	8.6	215

$\Rightarrow \boxed{a_n \sim \frac{1}{n^2}}$

Nützliche Symmetrieeigenschaften:
Wegen $\cos(-nx) = +\cos(nx)$ und $\sin(-nx) = -\sin(nx)$ folgt:

- falls $f(x)$ gerade, d.h. $f(-x) = f(x)$: reine Kosinus-Reihe!
- falls $f(x)$ ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$: reine Sinus-Reihe!

Komplexe Schreibweise:

$$\boxed{e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x} \qquad \text{EULER-Formel}$$

$$\Rightarrow \quad \cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}} \quad \text{mit} \quad c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & \text{für } n \geq 0 \\ \frac{a_n + ib_n}{2} & \text{für } n < 0 \\ a_n \ und\ b_n\ s.o. \end{cases}$$

2.3.2 Darstellung nichtperiodischer Funktionen durch Fourier-Integrale

Anmerkung: Fourier-Integrale werden erst in ET III bzw. Mathe IV behandelt!

Bisher: Darstellung periodischer Zeitsignale durch Fourier-Reihen.
In komplexer Schreibweise:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{+in\omega_0 t} \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t) e^{-in\omega_0 t}$$

N.B. Die Definition der Entwicklungskoeffizienten c_n unterscheidet sich um Faktor 2 von a_n bzw. b_n!

Jetzt: $T \to \infty$, d.h. einzelner "Puls" wird isoliert und nicht mehr periodisch wiederholt:

$$\begin{array}{rl} T \text{ endlich:} & \dfrac{1}{T} = \nu_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \\ T \to \infty: & \dfrac{1}{T} \to d\nu = \dfrac{d\omega}{2\pi}; \\ & n\omega_0 \to \omega \quad \text{für} \quad \omega_0 \to 0,\, n \to \infty \\ & \sum\limits_n \to \int \end{array}$$

$\Rightarrow$ für unendlich langes Zeitintervall, d.h. für nichtperiodischen Verlauf:

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, F(\omega)\cdot e^{+i\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, F(\omega)\cdot e^{+i\omega t}}$$

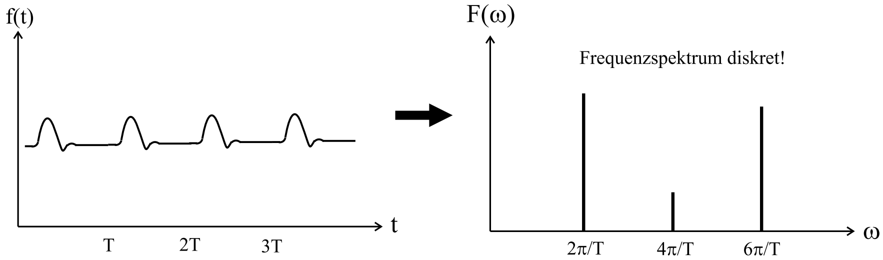
$$\text{mit} \quad \boxed{F(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\cdot e^{-i\omega t}}$$

"FOURIERTRANSFORMIERTE" von $f(t)$, "FOURIER-Integral",

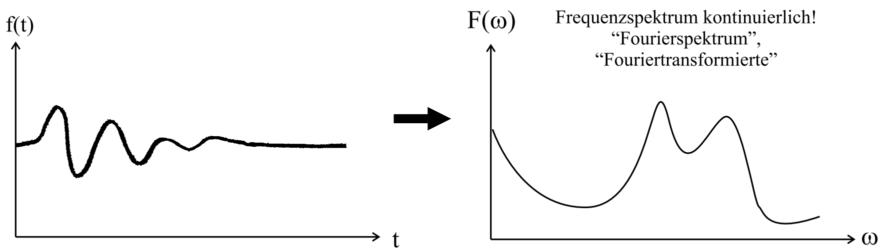
Dabei entspricht $d\nu\, F(\omega)$ den diskreten Koeffizienten c_n der Fourier-Reihe!

Physikalisches Bild:

Zerlegung eines periodischen Vorgangs in eine Fourier-Reihe:



Zerlegung eines nichtperiodischen Vorgangs in Fourier-Integrale:



Konsequenzen

- je kürzer der Puls, umso breiter der notwendige Frequenzbereich, um ihn spektral darzustellen.
- eine monochromatische Schwingung (d.h. eine einzige Frequenz) kann nur durch ein unendlich langes periodisches Signal dargestellt werden.
- je länger die Schwingung, umso schmaler das Spektrum!